www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1989
D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I)

DUREE : 3 heures **COEFFICIENT** : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

I

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2} \quad \text{avec} \quad |\lambda| < 1$$

, périodique, de période 2π, continue et infiniment dérivable.

1°) Exprimer les coefficients de Fourier de f, que l'on note a_n (cosinus) et b_n (sinus).

2°) Montrer qu'il existe entre trois coefficients consécutifs de la suite a_n une relation de récurrence de type $\alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n = 0$ (où $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$ et $\gamma = \lambda$).

3°) Exprimer alors a_n en fonction de λ, a_0 et a_1.

4°) Déduire de l'étude des séries de Fourier une relation simple entre a_n, a_0 et λ. Calculer alors a_0, a_1 et a_n pour $n > 1$.

5°) En déduire le développement en série de Fourier de f(x).

6°) En utilisant le résultat précédent, donner le développement en série de Fourier de la fonction g(x) périodique, de période 2π définie par

$$g(x) = \frac{\lambda \sin x}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2} \quad \text{avec} \quad |\lambda| < 1$$

7°) Donner l'expression des fonctions $h_n(x)$ qui vérifient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n h_n(x) = \frac{1}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}$$

II

1°) n étant un entier naturel, on appelle f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π, paire et continue, telle que

$$\forall \theta \in]0, \pi[\quad f_n(\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

a) Vérifier que $|f_n(\theta)| \leq n + 1$

b) Calculer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} h^n f_n(\theta)$

et préciser son rayon de convergence.

2°) Déduire des résultats précédents que la fonction g_1 de 2 variables x et h définie pour $|h| < 1$ et $|x| \leq 1$ par $g_1(x, h) = \frac{1}{1 - 2hx + h^2}$

est développable en série entière en h sous la forme

$$g_1(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n$$

P_n étant une fonction continue sur $[-1, 1]$ telle que

$$\forall x \in [-1, 1] \quad |P_n(x)| \leq n + 1$$

Montrer que P_n est une fonction polynôme dont les racines sont réelles et distinctes. Préciser son degré.

T.S.V.P.

3°) Ecrire une relation de récurrence entre les fonctions $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$.

Retrouver ce résultat en calculant $f_{n+1}(\theta) + f_{n-1}(\theta)$.

4°) a) $\mathcal{C}([-1, 1])$ étant l'espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle définies et continues sur l'intervalle $[-1, 1]$, montrer qu'en associant à tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{C}([-1, 1])$ le réel :

$$(f/g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\ f(x)\ g(x)\ dx$$

on définit une forme bilinéaire symétrique définie positive.

b) Soit $N : f \longrightarrow N(f) = \sqrt{(f/f)}$ la norme associée.

Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions polynômes précédentes est orthogonale pour le produit scalaire défini au a) et calculer pour tout entier positif n la norme $N(P_n)$.

III

x désigne un nombre réel donné, appartenant a $[-1, 1]$. $U_n(x)$ est la suite numérique vérifiant les relations :

$$U_1(x) = 2x \quad ; \quad U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \qquad U_n(x) = 2x\, U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

1°) On pose $U_{n-1}(x) = V_n(x)$ et $X_n(x) = \begin{pmatrix} U_n(x) \\ V_n(x) \end{pmatrix}$

Montrer qu'il existe une matrice $A_x \in \mathcal{M}_2$, ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, telle que :

$$\forall n \geq 2 \quad X_n(x) = A_x^{n-2}\, X_2(x)$$

2°) a) Dans le cas particulier où x = 1, démontrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A_1^k = k A_1 - (k - 1) I \quad (I \text{ étant la matrice unité})$$

b) Calculer alors $X_n(1)$ et en déduire la valeur de $U_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) Retrouver ce résultat en utilisant directement la relation de récurrence définissant la suite $U_n(x)$

3°) Calculer dans les mêmes conditions $U_n(-1)$

4°) Dans le cas général où $x \in]-1, 1[$ on pose $\theta = \text{Arccos } x$

a) Calculer en fonction de θ les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A_x ainsi que les vecteurs propres associés.

b) Calculer alors A_x^k pour $k \in \mathbb{N}^*$

c) Vérifier que $U_n(x)$ peut s'exprimer en fonction de θ sous la forme :

$$U_n(x) = \frac{\sin (n + 1)\theta}{\sin \theta}$$

N.B. : On rappelle que si P est le polynôme caractéristique d'une matrice A alors P (A) = 0 (0 étant la matrice nulle).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail